Exercice 1 — 6 points

Partie A

1. La variable aléatoire X compte le nombre de succès d'une répétition de 10 épreuves de Bernoulli. Les épreuves sont indépendantes deux à deux. La probabilité du succès est $p = 0{,}4$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $10\,;0{,}4$: $X \sim \mathscr{B}(10\,;\,0{,}4)$.

2. **a.** $P(X=2) = \binom{10}{2} \times p^2 \times (1-p)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^8 \approx 0{,}1209$

   b. Comme les évènements $\{X=i\}$ et $\{X=j\}$ sont disjoints pour $i \neq j$:

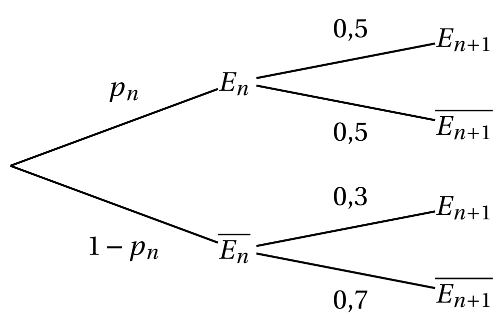
$$\begin{aligned} P(X \leqslant 2) &= P(\{X=0\} \cup \{X=1\} \cup \{X=2\}) \\ &= \sum_{i=0}^{2} P(X=i) \\ &= \sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} p^i (1-p)^{10-i} \\ &\approx 0{,}1673 \end{aligned}$$

   La probabilité que le phénomène El Niño soit dominant au plus deux années sur une période de 10 ans est d'environ 0,1673.

3. Comme X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0{,}4)$: $E(X) = n \times p = 10 \times 0{,}4 = 4$. En moyenne le phénomène El Nino est dominant quatre années sur une période de 10 ans.

Partie B

1.



2. $p_0 = 0$

   $1 - p_0 = 1$

   $p_1 = P(E_1) = P(E_0) \times P_{E_0}(E_1) + P\left(\overline{E_0}\right) \times P_{\overline{E_0}}(E_1) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 = 0{,}3$

3. $p_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P_{E_n}(E_{n+1}) + P\left(\overline{E_n}\right) \times P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$

   $= p_n \times 0{,}5 + (1-p_n) \times 0{,}3 = 0{,}2 \times p_n + 0{,}3$

4. **a.** En utilisant la calculatrice la suite $\left(p_n\right)$ semble être croissante et avoir pour limite 0,375.

n	p_n
0	0
1	0,3
2	0,36
3	0,372
$\vdots$	$\vdots$
13	0,374 999 999 692 8
14	0,374 999 999 938 56

b. On formule l'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}(n)\ :\ p_n \leqslant 0{,}375$.
On vérifie que $\mathscr{H}(0)$ **est vraie (initialisation).**
Comme $p_0 = 0 \leqslant 0{,}375$, $\mathscr{H}(0)$ est vraie.
Montrons que $\mathscr{H}(n) \Rightarrow \mathscr{H}(n+1)$ **(hérédité).**
On suppose que $\mathscr{H}(n)$ est vraie, avec $n \in \mathbb{N}$.
$p_{n+1} = 0{,}2 \times p_n + 0{,}3$
D'après $\mathscr{H}(n)$, $p_n \leqslant 0{,}375$, en multipliant par 0,2 on obtient :
$0{,}2 \times p_n \leqslant 0{,}075$, en ajoutant 0,3 on obtient :
$0{,}2 \times p_n + 0{,}3 \leqslant 0{,}375$, ainsi on obtient :
$p_{n+1} \leqslant 0{,}375$ ($\mathscr{H}(n+1)$ est vérifiée)
D'après le principe de récurrence,
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 0, p_n \leqslant 0{,}375$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n désignant une probabilité est un nombre positif.
Soit $n \in \mathbb{N}$
$p_{n+1} - p_n = -0{,}8 \times p_n + 0{,}3$
$p_{n+1} - p_n \geqslant -0{,}8 \times 0{,}375 + 0{,}3$
$p_{n+1} - p_n \geqslant 0$
Ceci étant valable quelque soit le choix de n, $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} - p_n \geqslant 0$, donc (p_n) est croissante.

d. (p_n) est croissante et majorée donc (p_n) est convergente vers l. De plus $l \leqslant 0{,}375$.

5. a.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{3}{8}\\
&= 0{,}2 \times p_n + 0{,}3 - \frac{3}{8}\\
&= 0{,}2 \times p_n + 0{,}2 \times \frac{3}{2} - 0{,}2 \times \frac{15}{8}\\
&= 0{,}2 \times p_n + 0{,}2 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{8}\right)\\
&= 0{,}2 \times p_n + 0{,}2 \times \left(-\frac{3}{8}\right)\\
&= 0{,}2 \times \left(p_n - \frac{3}{8}\right)
\end{aligned}$$

Finalement quel que soit n naturel, $u_{n+1} = 0{,}2 \times u_n$: ceci prouve que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2.
$u_0 = p_0 - \frac{3}{8} = 0 - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$

Le premier terme est donné par : $u_0 = -\dfrac{3}{8}$

b. Comme (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2 de premier terme $u_0 = -\dfrac{3}{8}$:

$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = -\dfrac{3}{8} \times 0{,}2^n$

Comme $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = p_n - \dfrac{3}{8}$,

$\forall n \in \mathbb{N} : p_n = -u_n + \dfrac{3}{8} = (-0{,}2^n + 1) \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{8}(1 - 0{,}2^n)$

c. Comme $0{,}2 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{3}{8}$

d. La probabilité d'observer un phénomène El Niño dominant tend vers $\dfrac{3}{8}$ quand le nombre d'années d'observation augmente.